

Nr. 264

KAREN INSA WOLF

**Kombination globaler Potentialmodelle
mit terrestrischen Schweredaten
für die Berechnung der zweiten Ableitungen
des Gravitationspotentials in Satellitenbahnhöhe**

HANNOVER 2007

Zusammenfassung

Im Rahmen der Satellitenmission GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer), deren Start für das Jahr 2007/2008 geplant ist, werden erstmalig mit Hilfe eines dreiachsigen Gradiometers die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials V mit nahezu globaler Abdeckung gemessen. Die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials bilden den Tensor $V_{[ij]}$, bezogen auf das Störpotential T ergibt sich der Tensor $T_{[ij]}$. Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Berechnung von Referenzwerten $T_{[ij]}$ für die Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessungen. Die höchste Qualität der GOCE-Gradiometermessungen wird in einem spektral begrenzten Bereich (Messband) erreicht. Die angestrebte Genauigkeit der Hauptdiagonalelemente des Tensors von 1 bis 2 mE im Ortsraum stellt hohe Anforderungen an die Qualität der Referenzwerte. Es werden daher globale Potentialmodelle mit terrestrischen Schwereanomalien, die in einem regionalen Gebiet vorliegen, kombiniert. Die Berechnung der Tensorkomponenten erfolgt mit dem Integrationsverfahren mit spektraler Kombination der Daten und der Kollokation nach kleinsten Quadraten. In beiden Verfahren wird die Remove-Restore-Technik angewendet, um den langwelligen Signalanteil auf Basis des globalen Potentialmodells und den kurzwelligen Signalanteil auf Basis der residualen Topographie (RTM-Reduktion) getrennt vom Restsignal in der Berechnung modellieren zu können.

Die Abschätzung der Varianz der Referenzwerte stellt einen wesentlichen Teil der Arbeit dar, ebenso die detaillierte Analyse der Unterschiede und Gemeinsamkeiten beider Berechnungsverfahren im Hinblick auf eine optimale Kombination der Eingangsdaten. Die Genauigkeitsanalyse erfolgt unter Berücksichtigung des Rauschens (korreliert und unkorreliert) und der räumlichen Verteilung der Beobachtungen einerseits durch Bestimmung der Varianz auf Basis von Gradvarianzen und mit Hilfe der Kollokation, andererseits durch die empirische Berechnung der Varianz aus verbleibendem Rauschen in den Zielgrößen unter Anwendung eines synthetischen Erdmodells. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte synthetische Erdmodell beinhaltet ein hochauflösendes globales Potentialmodell und ein digitales Geländemodell zur Modellierung der physikalischen und der geometrischen Figur der Erde. Rauschen wird sowohl für ein abgeleitetes Potentialmodell simuliert, das in der Remove-Restore-Technik eingesetzt wird, als auch für die synthetischen terrestrischen Beobachtungen.

Die Approximationsansätze beider Berechnungsmethoden werden theoretisch und numerisch verglichen. Zur Auswertung des Integrationsverfahrens wird die schnelle FOURIER-Transformation eingesetzt. Die Kollokation wird einerseits auf einem Parallelrechner gelöst, andererseits erfolgt die Berechnung seriell, wenn die Kovarianzmatrix eine Block-TOEPLITZ-Struktur aufweist. Bei gleichen Startannahmen bezüglich der eingehenden Datensätze verbleiben zwischen beiden Methoden zwar Unterschiede in den resultierenden Gewichtungsfaktoren der Beobachtungen, diese können aber bei feiner Auflösung (5' bis 15') der Beobachtungen, ausreichender Gebietsgröße und bei vergleichbarer Modellierung des Rauschens vernachlässigt werden. Alle Komponenten des Tensors $T_{[ij]}$ werden auf Basis realer Daten in Zentral-Europa berechnet. Die realen Schwereanomalien liegen RTM-reduziert vor, als globales Potentialmodell wird das kombinierte Modell EIGEN-GL04C bis zum sphärisch-harmonischen Grad 360 verwendet.

Die Ergebnisse zeigen, dass die Komponenten des Tensors $T_{[ij]}$ in der Bahnhöhe von GOCE aus der Kombination aktueller globaler Potentialmodelle und RTM-reduzierter terrestrischer Schwereanomalien mit einer Standardabweichung von 1 bis 2 mE berechnet werden können. Die Auflösung der terrestrischen Daten sollte etwa 5' bis 15' betragen. Das Rauschniveau sollte im Bereich von 1 mgal (korreliert oder unkorreliert) liegen. Die Berechnungspunkte müssen einen Abstand von etwa 3.5° vom Rand des regionalen Datengebietes einhalten. Die Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe ist für Hochgebirgsregionen zu empfehlen. Auf Basis des synthetischen Erdmodells wird gezeigt, dass für das verbleibende Rauschen der Referenzwerte unter diesen Randbedingungen das innerhalb des Messbandes des GOCE-Gradiometers geforderte Genauigkeitsniveau von $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ eingehalten werden kann.

Schlagwörter:

Kollokation, spektrale Kombination, synthetisches Erdmodell, Rauschsimulation, Satellitengradiometrie

Abstract

The GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) mission, planned to be launched 2007/2008, will be the first satellite mission applying three-dimensional gradiometry in space. Second order derivatives of the gravitational potential V will be measured globally, except for the polar gaps. The second order derivatives of the gravitational potential build up the tensor $V_{[ij]}$, related to the disturbing potential T , resulting in the tensor $T_{[ij]}$. The main objective of this thesis is the computation of reference values $T_{[ij]}$ for calibration and evaluation of the gradiometer measurements. The highest accuracy of the GOCE gradiometer is reached in a limited spectral range (measurement bandwidth). The corresponding accuracy of 1 to 2 mE in the space domain required for the calibration of the main diagonal components of the tensor is a challenge for the quality of the reference values. In order to reach the accuracy requirement, global potential models are combined with terrestrial gravity data of a regional area. Integration methods with spectral weighting of the input data and least squares collocation are applied for the computation of the reference values. The remove-restore technique is used for modelling the long-wavelength parts from the global potential model and short wavelength parts from the residual topography (RTM reduction) separate from the remaining signal.

The central parts of the thesis are the estimation of the variance of the reference values and the detailed analysis of differences and correspondences of both computation methods with regard to an optimal combination of the input data. Uncorrelated as well as correlated noise and the spatial distribution of the observations are considered in the accuracy analysis. On the one hand, the variance of the reference values is statistically derived from degree variances applying spectral weights and from least squares collocation. On the other hand, the variance is computed empirically based on remaining noise in the reference values derived from data of a synthetic Earth model. The synthetic Earth model, developed within the scope of this thesis, describes the physical and (part of) the geometrical figure of the Earth and consists of a high-resolution global potential model and a digital elevation model. Simulated noise is applied to a deduced synthetic global potential model, which is used in the remove-restore technique, as well as to the synthetic terrestrial data.

The approximation properties of both computation methods are theoretically and numerically compared. The integration method is evaluated using the fast FOURIER transformation. The least-squares collocation runs on a parallel computer and on a serial computer when the covariance matrix has a block TOEPLITZ structure. Differences between the methods remain in the resulting weighting factors for the observations, even if the starting conditions are the same. But they can be neglected when high resolution terrestrial data (5' up to 15') and a sufficiently large area are used. All components of the tensor $T_{[ij]}$ are computed based on real data in central Europe. The RTM reduction is applied on the gravity anomalies, the EIGEN-GL04C is used as global potential model up to a spherical harmonic degree of 360.

The numerical results show that the components of the tensor $T_{[ij]}$ can be computed with an accuracy of 1 to 2 mE at GOCE altitude when combining recent global potential models with RTM reduced terrestrial gravity data. The resolution of the terrestrial data should be 5' to 15' and their noise level should reach about 1 mgal (correlated or uncorrelated). The computation points have to keep a distance of about 3.5° from the edges of the regional observation area. Individual point heights should be considered in high mountain regions. Based on the synthetic Earth model it is shown that under these conditions the remaining noise of the computed reference values fall below the accuracy level of $11 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ required within the measurement bandwidth of the GOCE gradiometer.

keywords:

least-squares collocation, spectral combination, synthetic Earth model, noise simulation, satellite gradiometry

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Zielsetzung	1
1.2	Gliederung der Arbeit	2
2	Grundlagen	4
2.1	Grundlagen der physikalischen Geodäsie	4
2.1.1	Schwerefeld der Erde	4
2.1.2	Normalschwerefeld	6
2.1.3	Störgrößen des Schwerfeldes	7
2.1.4	Kugelfunktionsentwicklung der relevanten Funktionale	9
2.1.5	Bildung von Blockmittelwerten	11
2.2	Statistische Grundlagen	12
2.2.1	Zufallszahlen und eindimensionale stochastische Prozesse	12
2.2.2	Kovarianzfunktionen und Gradvarianzen	15
2.3	Satellitengradiometrie	19
2.3.1	GOCE-Mission	19
2.3.2	Grundprinzip der Gradiometrie	20
2.3.3	Kalibrierung und Evaluierung der Gradiometermessung	21
2.3.4	Angestrebte Genauigkeit der Tensorkomponenten	22
3	Verfahren zur regionalen Schwerfeldapproximation	25
3.1	Remove-Restore-Technik	25
3.2	Atmosphärische Reduktion	27
3.3	Reduktion des Effektes der residualen Topographie	28
3.4	Integrationsverfahren in regionaler Anwendung	29
3.4.1	Grundlagen	29
3.4.2	Anwendung der Remove-Restore-Technik	31
3.4.3	Modifikation des Integralkerns	34
3.4.4	Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen	37
3.4.5	Ansätze zur spektralen Gewichtung	40
3.5	Kollokation nach kleinsten Quadraten	42
3.5.1	Prädiktion der Zielgrößen und ihrer Varianzen	42
3.5.2	Anwendung der Remove-Restore-Technik	44
3.5.3	Kovarianzfunktionen	46
4	Literaturüberblick	48
4.1	Synthetische Erdmodelle zur Evaluierung von Rechenmethoden	48
4.2	Berechnung des Gravitationstensors zur GOCE-Kalibrierung und Evaluierung	49
4.3	Fortführung und Erweiterungen der besprochenen Arbeiten	52
5	Berechnung der Elemente des Gravitationstensors mittels Integration und Kollokation	54
5.1	Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung	54
5.1.1	Ableitung der Kernfunktionen für die Integration	54
5.1.2	Festlegung der Begrenzung des Integrationsgebietes	56
5.1.3	Wahl der spektralen Gewichtung	59

5.1.4	Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen auf Basis von Gradvarianzen	59
5.1.5	Aspekte der Gewichtung	62
5.1.6	Verarbeitung von Punktwerten und Blockmittelwerten	64
5.2	Kollokation nach kleinsten Quadraten	65
5.2.1	Prädiktion der Zielgrößen und ihrer Varianzen	65
5.2.2	Aspekte der Gewichtung	67
5.2.3	Verarbeitung von Punktwerten und Blockmittelwerten	69
6	Gegenüberstellung der Methoden	70
6.1	Diskussion der Approximationsansätze	70
6.2	Vergleich der Gewichtung	73
6.2.1	Grenzfall global und kontinuierlich vorliegender Beobachtungen	73
6.2.2	Praxisfall regional begrenzt und diskret vorliegender Beobachtungen	75
6.3	Fazit	76
7	Synthetische Daten	77
7.1	Anforderungen an das synthetische Erdmodell	77
7.2	Reale Datenbasis	78
7.2.1	Globale Potentialmodelle	78
7.2.2	Digitale Geländemodelle	79
7.3	Aufbau des synthetischen Erdmodells	80
7.4	Rauschsimulation	80
7.4.1	Berechnung des Rauschens für das globale Potentialmodell	81
7.4.2	Berechnung von unkorreliertem Rauschen für terrestrische Daten	82
7.4.3	Berechnung von korreliertem Rauschen für terrestrische Daten	83
7.5	Erzeugung der synthetischen Daten für verschiedene Testszenarien	86
7.5.1	Schwereanomalien	86
7.5.2	Tensorkomponenten	89
8	Implementierung der Berechnungsverfahren	91
8.1	Numerische Auswertung der Integration auf der Kugel	91
8.2	Lösung großer Gleichungssysteme auf Parallelrechnerarchitekturen	93
8.3	Faktorisierung und Gleichungslösung bei strukturierten Matrizen	98
8.4	Fazit	101
9	Numerische Genauigkeitsanalyse	102
9.1	Parameter der Kovarianzfunktionen	102
9.2	Spektrale Gewichte	105
9.3	Statistische Bestimmung der Varianzen	106
9.3.1	Varianzen aus der Akkumulation spektral gewichteter Gradvarianzen	106
9.3.2	Varianzen aus der Kollokation nach kleinsten Quadraten	109
9.3.3	Diskussion und Zusammenfassung der statistischen Berechnungen	111
9.4	Berechnung des Rauschens und der Varianzen auf Basis des synthetischen Erdmodells	112
9.4.1	Rauschen und Varianzen aus dem Integrationsverfahren	113
9.4.2	Rauschen und Varianzen aus der Kollokation nach kleinsten Quadraten	116
9.4.3	Diskussion und Zusammenfassung der Ergebnisse aus synthetischen Daten	119
9.4.4	Analyse der Spektraldichten des Rauschens	121
9.5	Gegenüberstellung und Zusammenfassung der Ergebnisse	123

10 Anwendung auf reale Daten	125
10.1 Verwendete Datensätze	126
10.2 Numerische Ergebnisse	128
10.2.1 Parameter der Kovarianzfunktionen	128
10.2.2 Ergebnisse des Integrationsverfahrens	128
10.2.3 Ergebnisse der Kollokation	129
10.2.4 Diskussion der Ergebnisse	130
10.3 Zusammenfassung der Ergebnisse	134
11 Zusammenfassung und Ausblick	136
Literaturverzeichnis	141
Dank	156
Lebenslauf	157

1 Einleitung

1.1 Motivation und Zielsetzung

Die Bestimmung der geometrischen Erdfigur und des Erdschwerefeldes sind zentrale Aufgaben in der Geodäsie. Ähnlich den geometrischen Bezugssystemen dient das Schwerefeld als Referenz in der Geodäsie und anderen Fachdisziplinen. So ist das Schwerefeld Grundlage für ein einheitliches Referenzsystem der physikalischen Höhen. In der Ozeanographie werden Strömungsmodelle aus der Meeresoberflächentopographie abgeleitet oder evaluiert; die Meeresoberflächentopographie wird aus der Differenz der mittleren Meeresoberfläche und dem Geoid als eine ausgewählte Äquipotentialfläche des Schwerefeldes berechnet. Die Schwerefeldbeobachtungen werden auch in der Geophysik als zusätzliche Messgröße verwendet, die Analyse der Variation des Schwerefeldes im Hinblick auf Massentransporte in der Erde ist aktueller Gegenstand der Forschung. Zur Verbesserung der Kenntnis des globalen Erdschwerefeldes tragen derzeit aktuelle Satellitenmissionen bei.

Nach den zwei erfolgreichen Schwerefeldsatellitenmissionen CHAMP und GRACE ist der Start der Mission GOCE für das Jahr 2007/2008 geplant. Ziel der Mission ist die Bestimmung des statischen Erdgravitationsfeldes bis zu einer - gerade für Satellitenmissionen - sehr hohen Auflösung von etwa 100 km auf der Erdoberfläche. Der langwellige Signalanteil des Gravitationsfeldes wird durch Analyse der Satellitenbahnen bestimmt. Zur Messung des mittelwelligen Signalanteils wird erstmalig ein dreiachsiges Gradiometer im Satelliten eingesetzt. Über Beschleunigungsdifferenzen der sechs symmetrisch um den Massenmittelpunkt des Satelliten angeordneten Akzelerometer werden die zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials V gemessen, die den Gravitationstensor

$$\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial i \partial j} = V_{[ij]} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

mit neun Komponenten V_{ij} ergeben. Der Gravitationstensor ist symmetrisch und es gilt im massefreien Raum die LAPLACE-Gleichung $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$. Deshalb enthält der Tensor nur fünf unabhängige Komponenten. Das Gradiometer wird zunächst am Boden und dann im Orbit intern kalibriert. Um den Bezug zum Gravitationsfeld der Erde mit der geforderten Genauigkeit zu gewährleisten, werden die Tensorcomponenten mit Hilfe von externen Daten kalibriert und evaluiert. In verschiedenen Arbeiten (Arabelos und Tscherning, 1995; Visser et al., 2000; Koop et al., 2001b; Pail, 2002; Bouman et al., 2004; Tóth et al., 2005; Arabelos et al., 2007) werden als externe Daten Tensorcomponenten, die aus der Kombination von regional vorliegenden terrestrischen Schweredaten mit aktuellen globalen Potentialmodellen berechnet werden, vorgeschlagen und verwendet. Die berechneten Tensor-elemente werden als Referenz in den Kalibrierungs- oder Evaluierungsprozess eingeführt. Aufgrund der hohen Genauigkeitsanforderung für GOCE ist eine detaillierte Genauigkeitsabschätzung der Referenzwerte erforderlich. Diese Fragestellung gab den konkreten Anlass für die vorliegende Arbeit.

Zur Berechnung der Tensorcomponenten existieren zwei konkurrierende Verfahren: das Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung und die Kollokation nach kleinsten Quadraten. Beide Verfahren werden in dieser Arbeit zur Berechnung aller Komponenten des Tensors eingesetzt. Die Berechnung erfolgt auf Basis regional vorliegender terrestrischer Schwereanomalien in Kombination mit aktuellen globalen Potentialmodellen. Die Unterschiede und Gemeinsamkeiten beider Berechnungsverfahren werden detailliert im Hinblick auf eine optimale Kombination der Eingangsdaten analysiert, die Approximationsansätze werden theoretisch und numerisch verglichen. Zur Evaluierung der Ergebnisse beider Verfahren wird ein synthetisches Erdmodell verwendet, um die Zielgrößen mit exakten Sollwerten vergleichen zu können, wie es in Abb. 1.1 skizziert ist. In dieser Arbeit wird für die synthetischen Beobachtungen Rauschen im Hinblick auf eine realitätsnahe Simulation erzeugt. Damit erlaubt der Soll-Ist-Vergleich auf Basis der synthetischen Daten nicht nur eine formale Überprüfung der Rechenmethoden, sondern auch eine Bewertung hinsichtlich unterschiedlicher Testszenarien, in denen das Rauschniveau und der Grad der Korrelation des Rauschens variiert wird. Ebenso wird die Auswirkung der Vernachlässigung der

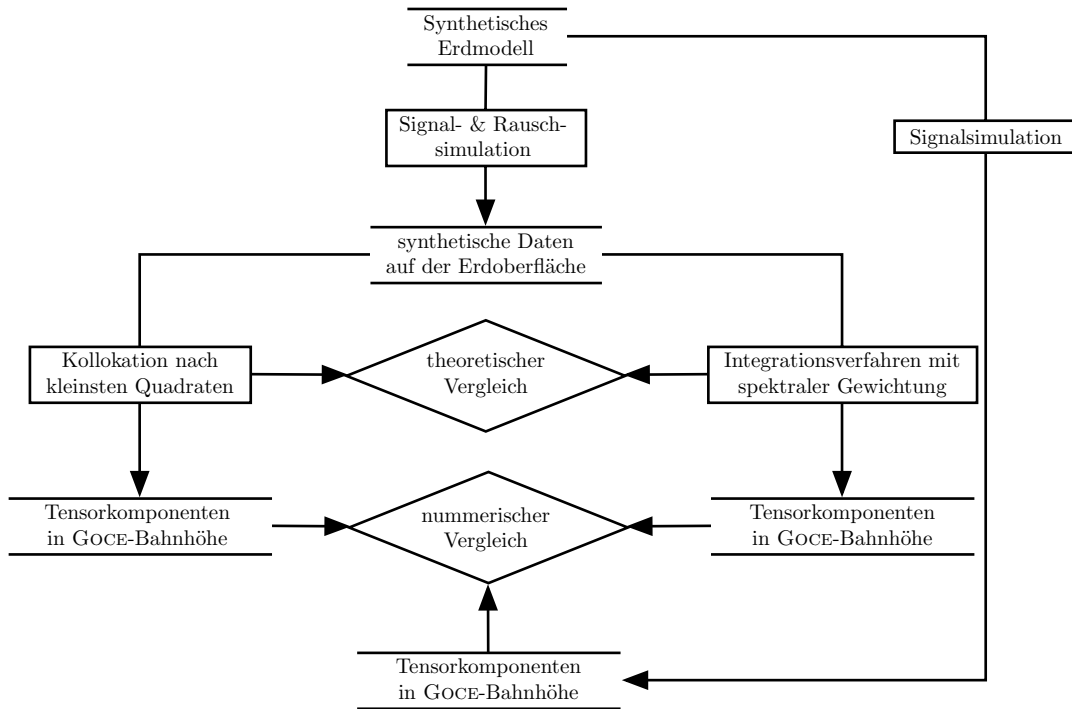


Abbildung 1.1. Untersuchungskonzept zur Evaluierung der Methoden für die Berechnung des Tensors $V_{[ij]}$ in der Bahnhöhe von GOCE.

individuellen Punkthöhen der Beobachtungen in der Modellierung analysiert. Durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse mit den exakten synthetischen Zielgrößen kann das verbleibende Rauschen abgeleitet und damit die Varianzen der Zielgrößen empirisch ermittelt werden. Diese Ergebnisse werden den Werten aus der statistischen Bestimmung der Varianzen auf Basis spektral gewichteter Gradvarianzen und auf Basis der Kollokation gegenübergestellt. In der Genauigkeitsanalyse wird der Einfluss des Rauschens der Eingangsdaten, aber auch der räumlichen Verteilung (Auflösung, Gebietsgröße) der terrestrischen Daten auf die Varianzen der Zielgrößen untersucht. Mit Hilfe der synthetischen Daten gelingt außerdem eine spektrale Untersuchung des verbleibenden Rauschens in den Referenzwerten. Dies ist von besonderem Interesse, da die hohe Qualität der Gradiometermessungen bei GOCE nur in einem begrenzten spektralen Bereich erreicht wird und überprüft werden muss, ob die Referenzwerte dieser Genauigkeitsanforderung entsprechen können.

Schließlich werden die Methoden auf reale Daten angewendet und alle Komponenten des Tensors (1.1) in der Bahnhöhe von GOCE berechnet. Die Ergebnisse der beiden Berechnungsmethoden werden verglichen.

1.2 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Begriffe und Zusammenhänge aus der physikalischen Geodäsie, der statistischen Grundlagen und der Satellitengradiometrie erläutert. Die anzustrebende Genauigkeit für die Referenzwerte des Tensors im Orts- und im Frequenzbereich wird am Ende des Kapitels diskutiert.

Kapitel 3 beschreibt die Grundlagen der eingesetzten Verfahren: das Integrationsverfahren mit spektraler Gewichtung und die Kollokation nach kleinsten Quadraten. Dabei werden die erforderlichen Reduktionen (Gravitationseffekt der Atmosphäre und der Topographie) besprochen, ebenso der Einsatz der Remove-Restore-Technik, um die lang- und kurzwelligen Signalanteile getrennt vom Restsignal, dem residualen Signal, zu behandeln. Die Modellierung des residualen Signals mit Hilfe der genannten Verfahren wird detailliert beschrieben, ebenso die zugehörige Bestimmung der Varianzen der Zielgrößen.

Ein Literaturüberblick zu den Kerngebieten der Arbeit, der Kombination globaler Potentialmodelle und terrestrischer Schweredaten für die Berechnung der Tensorkomponenten in Satellitenbahnhöhe und der Verwendung

synthetischer Modelle zur Methodenevaluierung, wird in Kapitel 4 gegeben. Die Beschreibung der Grundlagen der Berechnungsverfahren aus Kapitel 3 sind diesem Kapitel vorangestellt, um hier auf spezielle Aspekte der Berechnungsmethoden zur Unterscheidung und Abgrenzung der verschiedenen Untersuchungen aus der Literatur eingehen zu können. Die in der vorliegenden Arbeit vorgenommenen Fortführungen und Erweiterungen werden herausgearbeitet.

In Kapitel 5 wird die Berechnung der residualen Tensorkomponenten für beide Verfahren erläutert. Im Integrationsverfahren wird ein stochastisch motivierter Ansatz zur Berechnung der spektralen Gewichte angewendet. Spezielle Aspekte beider Verfahren bezüglich der Gewichtung der Eingangsdaten bei regionaler Auswertung werden diskutiert. Abschließend wird auf Unterschiede in der Behandlung von Punkt- und Blockmittelwerten eingegangen.

Ein detaillierter Vergleich der Approximationsansätze der eingesetzten Berechnungsmethoden erfolgt in Kapitel 6. Dabei wird einerseits von kontinuierlich und global vorliegenden, andererseits von diskret und regional begrenzt gegebenen Beobachtungen ausgegangen.

Der Aufbau des synthetischen Erdmodells wird in Kapitel 7 dargestellt. Die Erzeugung des Rauschens für das globale Potentialmodell und für die terrestrischen Beobachtungen wird erläutert. Detailliert wird auf den Ansatz zur Berechnung von korreliertem Rauschen für zweidimensionale Daten auf der Kugel eingegangen. Das Kapitel schließt mit der Beschreibung der in der Arbeit eingesetzten Testdatensätze, die sich bezüglich der Auflösung und des Rauschens unterscheiden.

Aspekte zur Implementierung der Berechnungsmethoden werden in Kapitel 8 behandelt. Das Integrationsverfahren wird mit Hilfe der schnellen FOURIER-Transformation effizient umgesetzt. Für die Auswertung der Kollokation wurden zwei Implementierungen realisiert. Zur Berücksichtigung der individuellen Punkthöhe der Beobachtungen erfolgt die Auswertung auf einem Parallelrechner. Wird die Punkthöhe vernachlässigt, ist eine serielle Berechnung durch Ausnutzung besonderer Matrixstrukturen (Block-TOEPLITZ) möglich.

Die numerischen Ergebnisse der Genauigkeitsanalyse werden in Kapitel 9 diskutiert. Es wird auf die Schätzung der Parameter lokaler Kovarianzfunktionen zur Anwendung in der Kollokation und auf die spektralen Gewichte des Integrationsverfahrens eingegangen. Es folgen die Ergebnisse aus der statistischen Bestimmung der Varianzen für die Zielgrößen auf Basis der spektral gewichteten Gradvarianzen und auf Basis der Kollokation. Anschließend werden die Ergebnisse aus den synthetischen Daten analysiert und die Resultate beider Berechnungsverfahren werden verglichen. Das verbleibende Rauschen wird im Frequenzraum analysiert. Die empirisch ermittelten Varianzen werden den Werten aus der statistischen Bestimmung gegenübergestellt.

Im Kapitel 10 erfolgt die Berechnung aller Tensorkomponenten auf Basis realer Daten. Es werden auch hier beide Verfahren eingesetzt und die Auswirkung der Vernachlässigung der Punkthöhe der Beobachtungen wird numerisch bewertet.

Eine Zusammenfassung der Arbeit und einen Ausblick gibt Kapitel 11.